7.6 Інтервальний аналіз

Основний інструмент, що використовується в інтервальному аналізі (interval analysis), оснований на дуже простій ідеї оточення дійсних чисел інтервалами, а векторів – областями прямокутної форми – паралелотопами. При цьому вперше з'являється можливість отримати гарантовану оцінку результатів комп'ютерних обчислень прямим переходом до інтервальних змінних в класичних чисельних алгоритмах, що використовуються зазвичай в обчисленнях з плаваючою точкою.

Окрім цього інтервальні методи знайшли широке застосування в моделюванні різноманітних систем в умовах невизначеності стану їхніх параметрів, робастному аналізі.

7.6.1 Класична інтервальна арифметика

Інтервальну арифметику можна визначити так:

$$[a,b] \quad * [c,d] = \{x * y\}, a \le x \le b, c \le y \le d,$$

де $* \in \{+,-,\cdot,/\}$. При цьому, якщо $*$ означає ділення, то $0 \overline{\in} [c,d]$. Неважко показати, що ці операції в кожному конкретному випадку еквівалентні нижченаведеним:

$$\begin{aligned} &[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d], \\ &[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c], \\ &[a,b]\cdot[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)], \\ &[a,b]/[c,d]=[a,b]\cdot[1/d,1/c], o \overline{\in} [c,d]. \end{aligned} \tag{7.66}$$

Окрім того, з формули (7.66) виходить, що:

1) віднімання необернене додаванню;

2) ділення необернене множенню;

3) інтервальне додавання і інтервальне множення асоціативні і комутативні;

4) закон дистрибутивності не виконується, а виконується включення A(B+C) $\subseteq$ AB+AC, що називається властивістю субдистрибутивності.

Додавання і множення мають звичайні властивостями асоціативності та комутативності:

$$A+(B+C)=(A+B)+C,\ A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C,$$

$$A+B=B+A,\ A\cdot B=B\cdot A.$$

Нулем додавання є число 0, а одиницею множення – число 1:

$$0+A=A+0=A, \quad 1\cdot A=A\cdot 1=A.$$

Однією з властивостей інтервальної арифметики є мотонність за включенням. Це означає, що з $A \subseteq C$ і $B \subseteq D$ випливає $A * B \subseteq C * D$ при $* \in \{+,-,\cdot,/\}$.

Згідно з означенням інтервальної арифметики та відповідно до символіки, що є загальною для робіт з інтервального аналізу, наведемо певні додаткові позначення:

$a = [\underline{a}; \overline{a}]$ – певний інтервал з множини **IR,** нижньою межею якого є $\underline{a}$, а верхньою – $\overline{a}$, тобто; $\underline{a} \le \overline{a}$ і $\underline{a}, \overline{a} \in R$;

$|\boldsymbol{a}|$ = $\overline{a}$ – $\underline{a}$ – довжина інтервалу, легко бачити, що $|\boldsymbol{a}| \ge 0$.

Далі ми будемо позначати через маленьку непотовщену літеру x дійсний аргумент дійсної функції, $x \in R$, а через велику літеру $\mathbf{X}$ – інтервальний аргумент інтервальної функції, $\mathbf{X} \in \mathbf{IR}$.

Будь-яке дійсне число b може бути подане у вигляді інтервалу [$\underline{a}$; $\overline{a}$], для якого справедливі співвідношення:

$$b = \overline{a} = \underline{a},$$
$$|a| = \overline{a} - \underline{a} = 0.$$

Крім наведених базових арифметичних операцій можна навести правило розрахунку значення інтервалів, що є результатом піднесення до степеня:

$$A^K = \begin{cases} [a^k, b^k] & при \quad k = 2j+1, \\ [a^k, b^k] & при \quad k = 2j, a \ge 0, \\ [a^k, b^k] & при \quad k = 2j, b \le 0, \\ [0, \max(a^k, b^k)] & при \quad k = 2j,\ 0 \in A, \end{cases}$$

та правило множення інтервалу на дійсну константу:

$$\alpha \cdot [a; b] = \begin{cases} [\alpha \cdot a; \alpha \cdot b], & \alpha \ge 0 \\ [\alpha \cdot b; \alpha \cdot a], & \alpha \le 0 \end{cases}.$$

Однією з важливих та визначальних властивостей при виконанні операцій в інтервальній арифметиці є властивість вкладення. Формально ця властивість визначається так. Якщо інтервали подають будь-яке фіксоване дійсне число в своєму діапазоні, то і результат арифметичної операції є будь-яким можливим дійсним числом в діапазоні інтервалу. В символьному записі ця властивість наводиться таким чином.

Одновимірна функція g^{IR} має властивість вкладення, якщо:

$$\forall[(i) \in IR],\ \forall[x \in i], g^R(x) \in g^{IR}(i).$$

Двовимірна функція g^{IR} має властивість вкладення, якщо:

$$\forall[(i,j)\in IR],\ \ \forall[(x,y)\in(i,j)],\ g^{R}(x,y)\in g^{IR}(i,j).$$

На основі основних алгебраїчних операцій та властивостей інтервального обчислення можна отримати набір елементарних функцій для інтервальних чисел.

7.6.2 Інтервальне розширення та звуження

Подання будь-якої загальної функції g^R у вигляді інтервальної функції g^{IR} є одною з найважливіших проблем інтервального аналізу.

Інтервальним розширенням функції $g^R(x)$, $x \in R$ назовемо такий елемент $g^{IR}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X}\in\mathbf{IR}$, що при $x \in X$ виконується умова $g^R(x)\in g^{IR}(\mathbf{X})$.

Інтервальне розширення позначається як

$$\underset{x\to X}{Di}\ g^{R}(x)=g^{IR}(X). \tag{7.67}$$

З точки зору практичного застосування інтервальних методів буває доцільним визначати інтервальне розширення більш спеціально, а саме, задаючи спосіб його отримання. Підтвердженням сказаного можуть служити нижченаведені приклади.

а) Функція $g^{IR}(\mathbf{X})$, що отримана заміною дійсного аргументу x в раціональній функції $g^R(x)$ інтервальним аргументом X з переходом в інтервальну арифметику, називається природним інтервальним розширенням. В цьому випадку справедлива така теорема.

Теорема 7.1. Якщо $g^{IR}(\mathbf{X})$ – природне інтервальне розширення $g^R(x)$ і кожна компонента вектора $X= (X_1,..., X_n)$ в $g^{IR}(\mathbf{X})$ зустрічається не більше одного разу, то

$$g^{IR}(X)=\bigcup_{x\in X} g^{R}(x).$$

Як видно, в цьому випадку для знаходження області значень $g^R(x)$ при $x \in X$ достатньо обчислювати раціональний інтервальний вираз $g^{IR}(\mathbf{X})$, тоді як, оперуючи дійсними функціями, ми повинні визначити нескінченну множину $\{g^R(x) \mid x \in X\}$.

б) Якщо множину дійсних чисел R прирівняти до множини машинних чисел R_M, то тоді інтервальне розширення функції $g^R(x)$ буде мати вигляд

$$g^{IR}(X)=\left(g^{R}(x)\right)_M+[-\varepsilon(x),\varepsilon(x)],$$

де $(g^R(x))_M$ – результат обчислення $g^R(x)$ на машині, а $\varepsilon(x)$ – абсолютна похибка $g^R(x)$, що дозволяє враховувати помилки машинного обчислення. При цьому $\varepsilon(x)$ оцінюється величиною $\varepsilon_0|(g^R(x))_M|$, де ε_0 – мінімальне машинне число.

Шляхом оператора Di можна перейти до дій над інтервалами. Необхідність в подібному інтервальному розширенні може виникнути наприклад, при врахуванні помилок подання у комп'ютері констант, що входять в функцію $g^R(x)$.

Потрібно зауважити, що з $g^R = \varphi^R$ не слідує, що $Di\ g^R = Di\ \varphi^R$. Наведемо наочний приклад.

Нехай $g^R(x) = \left(\sqrt{x}\right)^3 - 1$, $\varphi^R = \left(\left(x/\sqrt{x} - 1\right)\left(x + \sqrt{x} + 1\right)\right)$, X_0=< 1, 4 >. Для відповідних природних інтервальних розширень $g^{IR}(\mathbf{X}) = (\sqrt{X})^3 - 1$ та $\varphi^{IR}(X) = \left(\left(X/\sqrt{X} - 1\right)\left(X + \sqrt{X} + 1\right)\right)$ маємо $g^{IR}(\mathbf{X})$=<0 , 7>, $\varphi^{IR}(\mathbf{X})$ = < -7/2, 21>.

Оберненою операцією щодо інтервального розширення є інтервальне звуження.

Інтервальним звуженням функції F(X), X∈**IR**, називають відображення f (x), x∈**IR**, що отримується з F(X) при X=[x, x]=x. В символьному записі

$$\underset{X \to x}{Rs} \quad F(X) = f(x). \tag{7.68}$$

Потрібно звернути увагу на деякі аспекти. Наприклад, розглянемо звуження функції $g^{IR}(\mathbf{X})$ за X.

З класу еквівалентності $\underset{X \to x}{Rs}\ g^{IR}(X)$ завжди можна виділити відображення, інтервальне розширення яких охоплюють $g^{IR}(X)$. Для цього до $\underset{X \to x}{Rs}\ g^{IR}(X)$ достатньо додати деяке відображення $\varphi(x)$, що задовільняє умовам:

$$\bigcup_{x \in X} \varphi^R(x) = 0, \quad але \quad \underset{X \to x}{Di}\ \varphi^R(x) \neq 0.$$

Наприклад, $\varphi^R(x) = x - x$. З іншого боку, розширення $g^{IR}(X)$ може бути таке, що з відповідного класу еквівалентності можна виділити відображення, інтервальні розширення яких можуть як вносити, так і вноситися в $g^{IR}(X)$.

Справді, нехай, наприклад, $g^{IR}(X) = X^2 - 5X$. Тоді $\underset{X \to x}{Rs}\ g^{IR}(X) = x^2 - 5x$. Розглянемо два елементи з класу еквівалентності $g^R(x) = x^2 - 5x$, а саме: $g_1^R(x) = x(x-5)$ та $g_2^R(x) = x^2 - 6x + x$. Для відповідних природних інтервальних розширень в точці X_0 = <2, 4> маємо $g_1^{IR}(X_0)$=< −12;−2 >, $g_2^{IR}(X_0)$=< −18;8 >, в той час як $g^{IR}(X_0)$ = <-16, 6>, тобто $g_1^{IR}(X_0) \subset g^{IR}(X_0) \subset g_2^{IR}(X_0)$.

Застосування інтервальних засобів припускає побудову інтервальних розширень, на які накладаються умови найбільшої звуженості. В теоремі 7.1 наведена достатня умова найбільшої звуженості для випадку раціональних функцій.

7.6.3 Диференціювання та інтегрування в інтервальному аналізі

Підхід до диференціювання та інтегрування функції в інтервальній математиці не суттєво, але відрізняється від звичайної математики. Проте останні дослідження вчених математиків наблизили ці процеси до того, що нам відомо з дійсної математики.

Один з перших способів розрахунку похідної від інтервальної функції базувався на так званих методах занурення. Але застосування цього способу на практиці виявилось не дуже зручним. Тому дослідники спрямовували свій пошук на більш практичні способи диференціювання. В наш час найбільш поширеним є підхід до диференціювання, який застосували болгарські вчені. Вони, відповідно до дійсної математики, дещо змінили підхід до визначення послідовності та визначили поняття збіжності послідовності, знаходження границі послідовності в інтервальній математиці. Після визначення границі послідовності стало можливим сформулювати поняття диференціального обчислення для інтервальних функцій. Отримане визначення стало дуже схожим на те, яке ми звикли чути в математиці дійсних чисел.

Припустимо, що задана послідовність інтервалів $\{A_n\}$, $A_n \in IR$. Назвемо інтервал А, що є перетином всіх інтервалів, які охоплюють всі або майже всі, за винятком обмеженої кількості, інтервалом послідовності $\{A_n\}$, а значення s – границею послідовності $\{A_n\}_1^\infty$:

$$s\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Якщо $\{a_n\}_1^\infty$ – послідовність дійсних чисел, та $a = s\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ – це мінімальний інтервал, який охоплює всі межові точки послідовності. Наприклад: $s\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = [-1;1]$. Відповідно до поняття межі послідовності вводиться поняття межі інтервальної функції.

Припустимо, що $F:\Lambda \to IR$, $\Lambda \subset R$, $x_0 \in \Lambda$, $f \in F$. Будемо називати інтервал A s-границею функції в точці x_0, якщо A є перетином всіх інтервалів, які містять в собі інтервали вигляду

$$s\lim_{n\to\infty} F(f, x_n),$$

де – $x_n \in \Lambda$, $x_n \to x_0$

Введемо визначення межі інтервальної функції G, заданої через дійсні межові функції: $G(x) = [\underline{g}(x), \overline{g}(x)]$. Нехай G – інтервальна функція, визначена в околі точки $x_0 : \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$. Назвемо *s*-межею функції G при $x \to x_0$ інтервал

$$s\lim_{n\to\infty} G(x) = \left[\lim_{x\to x_0} g(x), \lim_{x\to x_0} g(x)\right].$$

Тоді можна ввести визначення похідної інтервальної функції:

$$G'(x) = s\lim_{h\to 0}\left(\frac{G(x+h)-G(x)}{h}\right). \qquad (7.69)$$

Визначення інтеграла інтервальної функції також має декілька різних формулювань. Але все ж найбільш правильним та легким для сприйняття є означення за ідеями Мура.

Припустимо, що f – неперервна функція, для якої існує інтервальне розширення F. Припустимо, що функція F є інтервальною функцією, визначеною для X $\subset$ A, де A=[a,b], a<b, та звуження F є неперервною дійсною функцією за A, F(x)=f(x), при x $\in$ A та f(x)$\subset$F(x) при X$\subset$A. Функція

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, t \in [a,b]$$

має неперервну похідну g′(x)=f(x) та, згідно з теоремою про середнє,

$$g(x) = g(a) + f(a + \theta\cdot(x-a))(x-a)$$

для деякого θ $\in$ [0,1]. Оскільки g(a)=0, відповідно

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt = \int f(a+\theta\cdot(x-a))(x-a), \ \theta \in [0;1].$$

Тоді

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \in F(a + [0;1]\cdot(x-a))(x-a),$$

а оскільки x$\in$[a,b] і x$\geq$a, то

$$\int_a^x f(t)dt \in F([a;x])(x-a).$$

Звідси для будь-якого $X = [\underline{x};\overline{x}] \subset A$, позначивши $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$ через $\int_{[x_1,x_2]} f(t)dt$ або

$\int_X f(t)dt$, маємо

$$\int_X f(t)dt \in F(X)\omega(X). \qquad (7.70)$$

Використовуючи властивість адитивності інтеграла

$$\int\limits_{[x_1,x_2]} f(t)dt + \int\limits_{[x_2,x_3]} f(t)dt = \int\limits_{[x_1,x_3]} f(t)dt,$$

отримаємо

$$\int\limits_{[x_1,x_3]} f(t)dt \in F([x_1,x_2])(x_2 - x_1) + F([x_2,x_3])(x_3 - x_2) \qquad (7.71)$$

Формула (7.69) дає підстави для введення поняття інтервального інтеграла від інтервальної функції.

Якщо f – неперервна інтервальна функція дійсної змінної та F –неперервне інтервальне розширення f таке, що F(x) = f(x), то інтеграл визначається як

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)dt = \bigcap_{n=1} \sum_{i=1}^{n} F\left(X_i^{(n)}\right)\cdot \frac{x-a}{n}. \qquad (7.72)$$

Якщо f – неперервна інтервальна функція дійсної змінної $x \in [a,b]$, то існує пара неперервних дійсних функцій f_1 і f_2 таких, що $f(x = [f_1(x), f_2(x)])$, і введене означення інтеграла рівносильне нижченаведеному:

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)dt = \left[\int\limits_{[a,x]} f_1(t)dt, \int\limits_{[a,x]} f_2(t)dt\right]. \qquad (7.73)$$

7.6.4 Інтервальні методи розв'язання диференціальних рівнянь

Цікавість до використання інтервальних методів при розв'язанні диференціальних рівнянь пояснюється тим, що в рамках інтервального аналізу вхідні дані диференціального рівняння можуть бути задані у вигляді інтервалів, а отримані рішення враховують не лише помилки у вхідних даних, але й помилки апроксимації та округлення.

При інтервальному моделюванні однією з задач є розв'язання диференціальних рівнянь з інтервальними даними. На сьогодняшній день розроблено багато інтервальних методів розв'язання диференціальних рівнянь. Розглянемо детально найвідоміші методи.

7.6.5 Інтервальний метод другого порядку для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = f(y), y = y(x), x \in R, \qquad (7.74)$$

$$y(0) = y_0. \qquad (7.75)$$

Припустимо, що функція $f(y)$ визначена і має дві перші обмежені похідні на інтервалі A=[a,b].

Розглядуваний нижче метод розв'язання задачі (7.74), (7.75) припускає неточно задані початкові дані, а саме: припустимо, що існує інтервал Y_0 такий, що він лежить строго в A і $y_0 \in Y_0$. Окрім того припустимо, що функція *f(y)* має інтервальне розширення F(Y), що має такі властивості:

1) функція F(Y) визначена і неперервна при всіх $Y \subset A$;

2) функція F(Y) монотонна за включенням, тобто з того, що $Y_1 \subset Y_2$, слідує $F(Y_1) \subset F(Y_2)$;

3) існує число $l>0$ таке, що $\omega(F(Y)) \leq l\omega(Y)$ для всіх $Y \subset A$, а також існує $\Psi(Y)$ – інтервальне розширення функції $f\left(ff'' + (f')^2\right)$, що визначене при $Y \subset A$ і монотонне за включенням.

Оскільки Y_0 лежить в A, для деякого скінченного $h_0>0$ знайдеться таке число $\xi > 0$, що

$$Y_0 + \xi\left(F(A) - h_0^2\psi(A)/12)\right) \subset A.$$

Інтервальний розв'язок побудуємо на відрізку [0, ξ], для цього розіб'ємо його на *m* частин точками $x_i = ih(i=0,1,\ldots,m)$, $h = \xi/m < h_0$.

Теорема 7.2. Якщо інтервали $Y(x_i)=Y_i$ $(i=0,1,\ldots,m)$ визначаються формулами

$$Y_0 = Y(x_0) = Y(0), \tag{7.76}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + (h/2)\left\{\begin{matrix} F(Y_i) + F(Y + hF(Y_i + [0,h]\cdot F(A))) + \\ (h^3/12)\Psi(Y_i + [0,h]\cdot F(A)) \end{matrix}\right\}, \tag{7.77}$$

то для будь-якого розв'язку *y(x)* рівняння (7.74) такого, що $y(0) \in Y_0$, справедливі включення $y(x_i) \in Y_i (i=1,\ldots,m)$ і має місце така оцінка для ширини інтервалів Y_i:

$$\omega(Y_i) \leq Nh^2 + M\omega(Y_0), \tag{7.78}$$

де N і M – дійсні константи, що не залежать від i і h.

7.6.6 Інтервальні методи типу Рунге-Кутта

Розглянемо задачу Коші:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{7.79}$$

$$y(0) = y_0 \in Y_0. \tag{7.80}$$

Припустимо, що функція *f(x,y)* визначена для всіх $(x,y) \in \Delta_x \times \Delta_y$, де $\Delta_x = \{x | 0 \leq x \leq c\}$, $\Delta_y = \{y | a \leq y \leq b\}$.

Оскільки ряд параметрів, що визначається формулами методу Рунге-Кутта, використовується при побудові відповідних інтервальних формул, розглянемо спосіб отримання розв'язку цим методом в класичній математиці.

Для знаходження $y(x+h)$, якщо відомо $y(x)$, використовується формула:

$$y(x+h)=y(x)+\sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h), \tag{7.81}$$

де $\begin{matrix} k_1(h)=hf(x,y), k_2(h)=hf(x+\alpha_2 h, y+\beta_{21}k_2(h)),..., \\ k_q(h)=hf(x+a_q hy+\beta_{21}k_1(h)+...+\beta_{qq-1}k_{q-1}(h)), \end{matrix}$ а величини $\alpha_2, \ldots, \alpha_q, p_1, \ldots,$ p_q, β_{ij} $(0<j<i\le q)$ залежать від вибору порядку похибки, q і самої функції f.

Нехай функція $f(x,y)$ має інтервальне розширення $\boldsymbol{F(X,Y)}$, що має властивості:

1. $\boldsymbol{F(X,Y)}$ визначена і неперервна для всіх $X\subset\Delta_x$, $Y\subset\Delta_y$;

2. $\boldsymbol{F(X,Y)}$ монотонна за включенням, тобто з $\boldsymbol{X_1\subset X}$, $\boldsymbol{Y_1\subset Y}$ слідує, що $\boldsymbol{F(X_1,Y_1)\subset F(X,Y)}$;

3. Існує константа L>0, така, що $\omega(F(X,Y))\le L(\omega(X)+\omega(Y))$ для всіх $X\subset\Delta_x$, $Y\subset\Delta_y$, де $\omega([a,b])=b-a$. Нехай, окрім цього, $\psi(x,y)$ має інтервальне розширення $\Psi(\boldsymbol{X,Y})$, визначене для всіх $X\subset\Delta_x$, $Y\subset\Delta_y$ і монотонне за включенням.

Тоді розв'язок інтервального диференціального рівняння буде таким:

$$Y_m(x_{j+1})=Y_m(x_j)+\sum_{i=1}^{q} p_i k_i^j(h)+(\Psi(X_j,Y_M(x_j))+[-\alpha,\alpha])h^{s+1}. \tag{7.82}$$

Величини $k_i^j(h)$ та α обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} &k_1(h)=hF(X,Y), \\ &k_2(h)=hF(X+\alpha_2 h, Y+\beta_{21}k_1(h)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &k_q(h)=hF(X+a_q hY+\beta_{21}k_1(h)+...+\beta_{qq-1}k_{q-1}(h)), \\ &\alpha=Mh_0, \\ &\left|\varphi^{(s+2)}(\theta h)/(s+2)!\right|\le M\le\infty. \end{aligned} \tag{7.83}$$

де s – порядок рівняння.

Цей метод справедливий і для розв'язання рівнянь зі змінним кроком, а також для систем рівнянь з відповідними початковими умовами.

7.6.7 Метод Крукеберга

Трикроковий метод Крукеберга чисельного розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь дозволяє отримати інтервали, що містять розв'язок задачі. В ньому попередньо будується інтервальний розв'язок для фіксованої дійсної задачі з певними початковими значеннями з заданої множини (інтервалу), а потім методом збурень знаходяться інтервальні включення для всіх можливих розв'язків.

Нехай рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0)=y_0$ має єдиний розв'язок $\tilde{y}(x; x_0, y_0)$ на $[x_0, x_1]$. Якщо початкові дані задані неточно, тобто $y_0 \in Y_0$, де Y_0 – певний інтервал в R, то розв'язки задачі в такій постановці утворюють множину $\overline{Y} = \{z \mid z = \tilde{y}(x, x_0, y_0), y_0 \in Y_0\}$. Необхідно знайти інтервал $Y_1^* \supseteq Y_1$, де $Y_1 = \overline{Y}(x_1)$, $x_1=x_0+h$, величина кроку h визначається в процесі розв'язання.

На першому кроці знаходимо крок h і інтервальний поліном k-го степеня $P_k(x-x_0)$ такий, що при $x_1=x_0+h$, $P_k(x - x_0) \supseteq \overline{Y}(x), x \in [x_0, x_1]$. Такі поліноми можуть бути отримані за ітераційним алгоритмом Пікара:

$$P_{k+1} = Y + \int_0^x F(x_0 + \zeta) d\zeta, (k = 0,1,2,...),$$

де F – інтервальне розширення функції f. На практиці обмежуються поліномами нульового степеня p_0.

На другому етапі знаходиться інтервальний розв'язок початкового рівняння з дійсними початковими даними $y(x_0)=d_0 \in Y_0$. Використовуючи формулу Тейлора, в якій дійсні аргументи замінені інтервальними, маємо інтервал

$$D_1 = d_0 + hF(x_0, d_0) + \frac{h^2}{2!} F'([x_0, x_1]), P_0([0, h]).$$

Зрозуміло, що $d_1 = \tilde{y}(x_1; x_0, d_0) \in D$.

Третій етап є інтервальним варіантом методу збурень.

Інтервал $U_0=Y_0-d_0$ всіх можливих збурень початкового значення d_0. Перепишемо початкову задачу у вигляді

$$\begin{aligned} d(u + d)/dx &= f(x; u + d), \\ u(x_0) &= u_0 \in U_0. \end{aligned} \tag{7.84}$$

Нам відомо, що $u(x_1) = d_1 = \tilde{y}(x_1; x_0, d_0)$, необхідно визначити $u_1 = \tilde{y}(x_1; x_0, u_0)$. Шляхом розкладання правої частини за формулою Тейлора в околі розв'язку $\tilde{y}(x_1; x_0, d_0) = d_1$ і, отримуючи члени першого порядку відносно h, маємо рівняння

$$\frac{du}{dx} = u\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (7.85)$$

з відповідними початковими умовами з (7.84). Тоді інтервал $U_1=QU_0$, де $Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} F^k$, F – інтервальне розширення функції f'_y і є шуканим розв'язком задачі (7.84), (7.85).

Метод Крукеберга природним чином узагальнюється на випадок системи рівнянь. При цьому $\frac{\partial f}{\partial y}$ буде матрицею, елементи якої є інтервальними розширеннями функцій $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$.

7.6.8 Подання інтервальної функції через граничні дійсні функції

Подання інтервальної функції через дві граничні дійсні функції є одним з важливих підрозділів інтервального аналізу. Подібне подання дозволяє замість вивчення інтервальної функції зосередити увагу на двох дійсних функціях. Це не тільки в певних випадках спрощує розрахунки, але й дає змогу уявити як поводить себе інтервальна функція в тих або інших випадках, отримати більш точні результати розрахунків.

Проблема подання інтервальної функції двома граничними дійсними полягає в знаходженні подання

$$F(X) = [f_1(t), f_2(t)], \qquad (7.86)$$

де $f_1(t), f_2(t)$ – певні дійсні функції, які відповідають визначенню.

Наприклад, якщо на відрізку 0≤x≤3 розглянемо функцію

$$F(x) = x^2 - [2,4]\cdot x + [3,5], \qquad (7.87)$$

тоді $f_1(t)=x^2-4\cdot x+3$, $f_2(t)=x^2-2\cdot x+5$.

Дійсно, кожному значенню аргументу з інтервалу $x \in [0, 3]$ функція (7.86) ставить у відповідність певний інтервал $[a, b]$. Отже, множина значень функції на площині (x,y) являє собою область, обмежену кривими $y=x^2-4\cdot x+3$, $y=x^2-2\cdot x+5$ та відрізками прямих $x=0$, $x=3$.

Процес визначення функцій f_1 та f_2 залежить від того, з яких причин функція F має за своє значення інтервали, тобто, чому результат є інтервальним числом. Таких причин можна виділити декілька:

1) функція F є функцією дійсного аргументу x, але константи, що входять до F – інтервали;

2) функція F є функцією інтервального аргументу X, але константи, що входять до F – дійсні числа;

3) аргумент функції F та константи, що входять до її складу, є інтервалами.

Якщо функція F є поліномом виду $F(x)=\sum_{i=1}^{m}[a_i;c_i]\cdot x^i$, то граничні функції виражаються як:

$$f_1(x0)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{m} a_i\cdot x^i & \textit{якщо}\quad x\ge 0,\\ \sum_{i=0}^{m}\left(a_i\cdot\theta(i)+c_i\cdot\gamma(i)\right)\cdot x^i & \textit{якщо}\quad x\le 0,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{m} c_i\cdot x^i & \textit{якщо}\quad x\ge 0,\\ \sum_{i=0}^{m}\left(a_i\cdot\gamma(i)+c_i\cdot\theta(i)\right)\cdot i & \textit{якщо}\quad x\le 0,\end{cases}$$

де $\gamma(i)=\begin{cases}0 & \textit{якщо}\quad i=2k,\\ 1 & \textit{якщо}\quad i=2k+1\end{cases}$, $\theta(i)=\begin{cases}1 & \textit{якщо}\quad i=2k,\\ 0 & \textit{якщо}\quad i=2k+1.\end{cases}$

Якщо повернутися до вищенаведеного прикладу, то отримаємо:

$$f_1(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & \textit{якщо}\quad x\ge 0,\\ x^2-2x+3 & \textit{якщо}\quad x\le 0.\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}x^2-2x+5 & \textit{якщо}\quad x\ge 0,\\ x^2-4x+5 & \textit{якщо}\quad x\le 0.\end{cases}$$

Із застосуванням визначення граничних функцій дещо змінюється означення диференціала та інтеграла інтервальної функції.

Так, якщо f – неперервна інтервальна функція дійсного аргументу x∈[a,b], то існує пара неперервних дійсних функцій f_1 та f_2 таких, що інтеграл функції можна визначити, як

$$\int_{[a,x]} f(t)dt=\left[\int_{[a,x]} f_1(t)dt;\ \int_{[a,x]} f_2(t)dt\right]\int_{[a,x]} f(t)dt=[\int].$$

Також можна змінити визначення межі інтервальної функції. Припустимо, що інтервальна функція G задана через дійсні межові функції: G(x) = [$\underline{g}$(x); $\overline{g}$ (x)]. Похідна для інтервальної функції G(x), що визначена в околі точки $x_0:\{x\,|\,0<|\,x-x_0\,|<\delta\}$, може визначатись за формулою:

$$s\lim_{x\to x_0} G(x) = \left[s\lim_{x\to x_0} \underline{g}(x); s\lim_{x\to x_0} \overline{g}(x) \right].$$

Визначення інтервальної функції через її межові функції широко використовується на практиці. Це насамперед пов'язано з тим, що апарат обчислень з дійсними функціями добре розроблений. Припустимо, що ми маємо інтервальний алгоритм, який необхідно реалізувати. Отже, очікувані результати – інтервали. Але з причин округлень, неможливості отримання дійсної області значень інтервальної функції, а також неможливості отримання інтервалів, які значно ширші, ніж насправді.

Тому дуже часто йдуть іншим шляхом. Інтервальний алгоритм поділяють на два дійсних. Тоді кожний з дійсних реалізують в рамках інтервальної арифметики. Це не тільки зменшує складність розрахунків для людини, що не досить знайома з інтервальним аналізом, але в певних випадках дозволяє отримати більш точні результати. Але це можливо лише в випадках, коли подання інтервальної функції через її граничні можливе і не дуже складне, не займає зайвої кількості часу.

7.6.9 Розширення інтервальної арифметики

Класична інтервальна арифметика ***IR*** є неповною за своїм математичним змістом. З математичної точки зору, вона є лише комутативною напівгрупою за додаванням та множенням, а відносно порядку включення вона не є решіткою. Ця неповнота алгебраїчної та порядкової структур ***IR*** природно стимулює намагання створити на її основі більш досконалу інтервальну арифметику. І таке доповнення було зроблено в працях Каухера, а потім вдосконалено в працях Гарденеса та Трепата. Арифметика, що створена в цих наукових працях, отримала назву «розширеної інтервальної арифметики» чи «інтервальної арифметики Каухера».

Елементами інтервальної арифметики Каухера, як і в класичній інтервальній арифметиці, є дійсні пари $[\underline{x};\overline{x}]$, але вони не обов'язково зв'язані співвідношенням $\underline{x} \le \overline{x}$. Таким чином, множини інтервалів ***IR*** отримуються шляхом приєднання невласних інтервалів $[\underline{x};\overline{x}]$, $\underline{x} > \overline{x}$ до множини $IR = \{[\underline{x};\overline{x}] \mid \underline{x},\overline{x} \in R, \underline{x} \le \overline{x}\}$ власних інтервалів та дійсних чисел. Власні та невласні інтервали, дві половинки IR, можна змінювати при відображенні дуалізації

$$dual : IR \to IR$$

такому, що $dual[\underline{x};\overline{x}] = [\overline{x};\underline{x}]$.

Додавання та множення на дійсні константи визначається в арифметиці Каухера так:

$$\left[\underline{x};\overline{x}\right]+\left[\underline{y};\overline{y}\right]=\left[\underline{x}+\underline{y};\overline{x}+\overline{y}\right],$$

$$\lambda\cdot\left[\underline{x};\overline{x}\right]=\begin{cases}\left[\lambda\cdot\underline{x};\lambda\cdot\overline{x}\right], & якщо\ \ \lambda\geq 0,\\ \left[\lambda\cdot\overline{x};\lambda\cdot\underline{x}\right], & якщо\ \ \lambda\leq 0.\end{cases}$$

Таким чином, кожен елемент *x* з *IR* має один протилежний елемент, що часто визначається як «opp **x**», і

$$opp\left[\underline{x};\overline{x}\right]=\left[-\underline{x};-\overline{x}\right]$$

Часто в наукових працях можна зустріти спеціальне позначення для операції, що є оберненою до додавання, через Θ:

$$x\Theta\, y = x + opp\, y.$$

Віднімання та ділення в арифметиці Каухера визначаються як:

$$x\text{-}y = x + (-1)\text{-}y,$$

$x/y = x\cdot\left[\dfrac{1}{\overline{y}};\dfrac{1}{\underline{y}}\right]$ за умови, що $0\notin\mathbf{y}$.

Крім того, в інтервальній арифметиці Каухера зберігається монотонність інтервальних операцій за включенням:

$$x\subseteq x', y\subseteq y' \Rightarrow x^{*}y\subseteq x'^{*}y',$$

де $* \in \{+,-,\cdot,/\}$, x, x', y, y' є IR.

Дії над векторами та матрицями в розширеній інтервальній арифметиці Каухера визначають подібно тому, як це робиться в класичній арифметиці. Сума (різниця) двох інтервальних матриць однакового розміру є інтервальною матрицею того ж самого розміру, яка утворюється з поелементних сум (різниць) операндів. Якщо $A=(a_{ij})\in IR^{m\times 1}$, $A=(b_{ij})\in IR^{1\times n}$, то результатом їх множення є матриця $C=(c_{ij})\in IR^{m\times n}$ така, що

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}.$$

Багато означень та понять класичної інтервальної арифметики без змін переносяться в арифметику Каухера. Тому фактично Каухер не змінив основ, а тільки вніс певні вдосконалення. Деякі з них суттєво спростили застосування інтервального обчислення на практиці.